

Statistik 1

Übung 3

Einleitung und Ziele der Übung

Herzlich Willkommen zur Übung Statistik 1. Diese dritte Übung dient die drei Vorlesungen zum Thema Wahrscheinlichkeit ab. D.h. die letzten Abschnitte werden Ihnen vermutlich noch unbekannt sein zum Zeitpunkt der Übung. Betrachten Sie diese als Hausaufgabe bis zur nächsten Statistikübung. Die dann wieder in der Übung verglichen wird

Agenda

- (Bedingte) Wahrscheinlichkeit
- Mengen
- Stochastische Unabhängigkeit
- Satz von Bayes
- Verteilungen

1. (Bedingte) Wahrscheinlichkeit

Welche *Regel* erlaubt, dass sich Wahrscheinlichkeiten (der Population) aus (relativen) Häufigkeiten in der Stichprobe schätzen lassen?

Betrachten Sie die (fiktiven) Häufigkeiten zur Lieblingsfarbe von Personen aus 2 Kantonen. Die Daten sind fiktiv. Lösen Sie anschliessend die Aufgaben auf der nächsten Seite. Gehen Sie von einem Laplace-Experiment aus (alle Personen haben die gleiche Wahrscheinlichkeit ausgewählt zu werden).

	Uri	Luzern	Gesamt
Blau	50	40	90
Rot	30	21	51
Grün	40	13	53
Gelb	10	11	21
Schwarz	13	54	67
Orange	17	12	29
Andere	40	53	93
Gesamt	200	204	404

1. (Bedingte) Wahrscheinlichkeit - Übung

Berechnen Sie die nachfolgenden Wahrscheinlichkeiten basierend auf der Stichprobe:

Hinweis

- Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 0 und 1 (keine führende Null)
- Wahrscheinlichkeiten sind meist klein, daher immer 3 Stellen nach dem Komma (sonst 2)
- Runden nicht vergessen!
- $p =$, eine Person ist aus Uri
- $p =$, eine Person mag Gelb oder Orange
- $p =$, eine Person ist aus Luzern und mag Schwarz
- $p =$, eine Person ist aus Luzern, wenn wir wissen, dass diese Person Schwarz mag
- $p =$, zweimal hintereinander eine Person die Grün mag auszuwählen, wobei dieselbe Person nicht 2x ausgewählt werden darf
- $p =$, zweimal hintereinander eine Person die Grün oder Gelb mag auszuwählen, wobei dieselbe Person 2x ausgewählt werden darf
- $p =$, dass eine Person weder Rot noch Blau mag

2. Mengen - Einführung

Wiederholen Sie kurz die Definitionen von Schnittmenge, Vereinigungsmenge sowie Komplement.

Gegeben seien folgende Mengen basierend auf dem Werfen dreier Münzen:

- $\Omega = \{(Z, Z, Z), (Z, Z, K), (Z, K, Z), (Z, K, K), (K, Z, Z), (K, Z, K), (K, K, Z), (K, K, K)\}$
- $A = \text{mehr Zahl als Kopf}$
- $B = \text{dritter Wurf Kopf}$
- $C = \text{nur Kopf}$

Lösen Sie anschliessend die Aufgaben der nächsten Seite.

2. Mengen - Übung 1

Führen Sie alle Elemente an. Für das Feedback ist es wichtig, dass Sie die Reihenfolge wie in Omega einhalten und alle Klammern korrekt setzen. Leerzeichen sind egal. Für die leere Menge bitte einfach das Wort leer eintragen. Tragen Sie zum Beispiel in das nachfolgende Feld $\{(Z, Z, Z), (K, K, K)\}$ ein:

Hier nochmal Omega (zum Kopieren):

$\Omega = \{(Z, Z, Z), (Z, Z, K), (Z, K, Z), (Z, K, K), (K, Z, Z), (K, Z, K), (K, K, Z), (K, K, K)\}$

Menge		Elemente
A	=	
B	=	
C	=	
C^C	=	
$B \setminus A$	=	
$C \cap A$	=	
$C \cup \Omega$	=	
$A \cap B$	=	

2. Mengen - Übung 2

Hier nochmal Omega (zum Kopieren):

$$\Omega = \{(Z, Z, Z), (Z, Z, K), (Z, K, Z), (Z, K, K), (K, Z, Z), (K, Z, K), (K, K, Z), (K, K, K)\}$$

Noch drei etwas schwerere zum Abschluss:

Menge		Elemente
$(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$	=	
$((A \setminus B) \cap (B \setminus A)) \cup C$	=	
$(A \cup B)^C$	=	

3. Stochastische Unabhängigkeit - Einführung

Wiederholen Sie kurz, was es bedeutet, wenn zwei Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

Mathematisch können wir dies überprüfen, wenn wir die linke und rechte Hälfte des Multiplikationstheorems bestimmen und dann prüfen, ob das Theorem eine wahre Aussage ist.

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B)$$

Wir werden beim vorherigen Beispiel "3x Werfen einer Münze" bleiben.

3. Stochastische Unabhängigkeit - Übung

Wir wollen prüfen, ob die folgenden Ereignisse stochastisch unabhängig sind:

$A = \text{Mehr Zahl als Kopf}$ $B = \text{Letzter Wurf Kopf}$ $D = \text{1. und 2. Wurf Zahl}$

Bestimmen Sie dafür der Reihe nach folgende Angaben und treffen Sie dann Ihre Entscheidung! Für absolute Häufigkeiten sind keine Nachkommastellen notwendig

zu bestimmen			Wert	zu bestimmen			Wert
n_A	=			$n_{A \cap B}$	=		
n_B	=			$n_{A \cap D}$	=		
n_D	=			$n_{B \cap D}$	=		
n_Ω	=						
$p(A)$	=			$p(A) * p(B)$	=		
$p(B)$	=			$p(A) * p(D)$	=		
$p(D)$	=			$p(B) * p(D)$	=		
$p(A \cap B)$	=			A und B sind			
$p(A \cap D)$	=			A und D sind			
$p(B \cap D)$	=			B und D sind			

4. Satz von Bayes - Einführung

Der Satz von Bayes beschreibt den Zusammenhang zwischen den Basisraten und den bedingten Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse:

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) * p(A)}{p(B)}$$

4. Satz von Bayes - Übung

In einer klinischen Studie gab es eine Experimentalgruppe mit 20 Personen und eine Kontrollgruppe mit 30 Personen. In der Experimentalgruppe war die Heilungswahrscheinlichkeit $3/4$, in der Kontrollgruppe $1/4$. Vor Ihnen steht eine Person, die nicht geheilt wurde. Wie wahrscheinlich ist es, dass diese zur Experimentalgruppe gehört?

Um diese Aufgabe zu lösen, sollten Sie sich zunächst überlegen. Was ist das Ereignis A und was ist das Ereignis B. Überlegen Sie dann, welche bedingte Wahrscheinlichkeit Sie haben und berechnen Sie den verbleibenden Wert mit dem Satz von Bayes.

Zwischenergebnisse

- $p(A) =$
- $p(B|A) =$
- $p(B) =$

Lösung

- $p(A|B) =$

5. Verteilungen - Einführung

In der zweiten und dritten Einheit zur Wahrscheinlichkeit sind mehrere Verteilungen vorgestellt wurden. Auf den nächsten Seiten finden Sie einige Verständnisfragen dazu. Im Anschluss erhalten Sie dann einige Rechenaufgaben und Übungen zu den Tabellen (Hinweis: die Tabellen beschränken sich von den bisher vorgestellten Verteilungen auf Standardnormal- und Binomialverteilung)

5. Verteilungen - Übung 1

SC: Welche der folgenden Größen wird typischerweise mit einer Poissonverteilung modelliert?

- ☐ Anteil richtiger Antworten in einem Test
- ☐ Anzahl Verkehrsunfälle pro Monat
- ☐ Körpergröße einer Person
- ☐ Prüfungsnote eines Studierenden

✓

?

MC: Welche Aussagen zur Normalverteilung treffen zu?

- ☐ Die Verteilung ist symmetrisch.
- ☐ Werte links und rechts der Mitte sind gleich wahrscheinlich.
- ☐ Mittelwert und Median stimmen üblicherweise überein.
- ☐ Negative Werte sind grundsätzlich unmöglich.

✓

?

SC: Wofür wird die Quantilfunktion üblicherweise verwendet?

- ☐ Zur Bestimmung einer Varianz
- ☐ Zur Bestimmung eines Grenzwerts für einen vorgegebenen Prozentrang
- ☐ Zur Berechnung eines Erwartungswerts
- ☐ Zur Berechnung einer Einzelwahrscheinlichkeit

✓

?

5. Verteilungen - Übung 2

MC: Welche Aussagen beschreiben typische Eigenschaften einer Binomialverteilung?

- ☐ Die Zufallsvariable kann beliebige Dezimalwerte annehmen.
- ☐ Die Anzahl der Versuche ist vorgegeben.
- ☐ Die Binomialverteilung eignet sich für Ja-Nein-Ereignisse.
- ☐ Die Anzahl möglicher Erfolge ist begrenzt.

✓

?

SC: Was beschreibt die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung?

- ☐ Die Wahrscheinlichkeit für Werte kleiner oder gleich x
- ☐ Die Varianz
- ☐ Die Dichte an einem Punkt
- ☐ Das Quantil zu einer Wahrscheinlichkeit

✓

?

SC: Was bedeutet bei einer (diskreten) Wahrscheinlichkeitsverteilung die Angabe $p(X \leq 3)$?

- ☐ Wahrscheinlichkeit für mindestens 3 Ereignisse
- ☐ Wahrscheinlichkeit für höchstens 3 Ereignisse
- ☐ Wahrscheinlichkeit für genau 3 Ereignisse
- ☐ Wahrscheinlichkeit für weniger als 3 Ereignisse

✓

5. Verteilungen - Einführung 2

R bietet für jede Verteilung vier Funktionen, die immer mit dem gleichen Buchstaben starten...

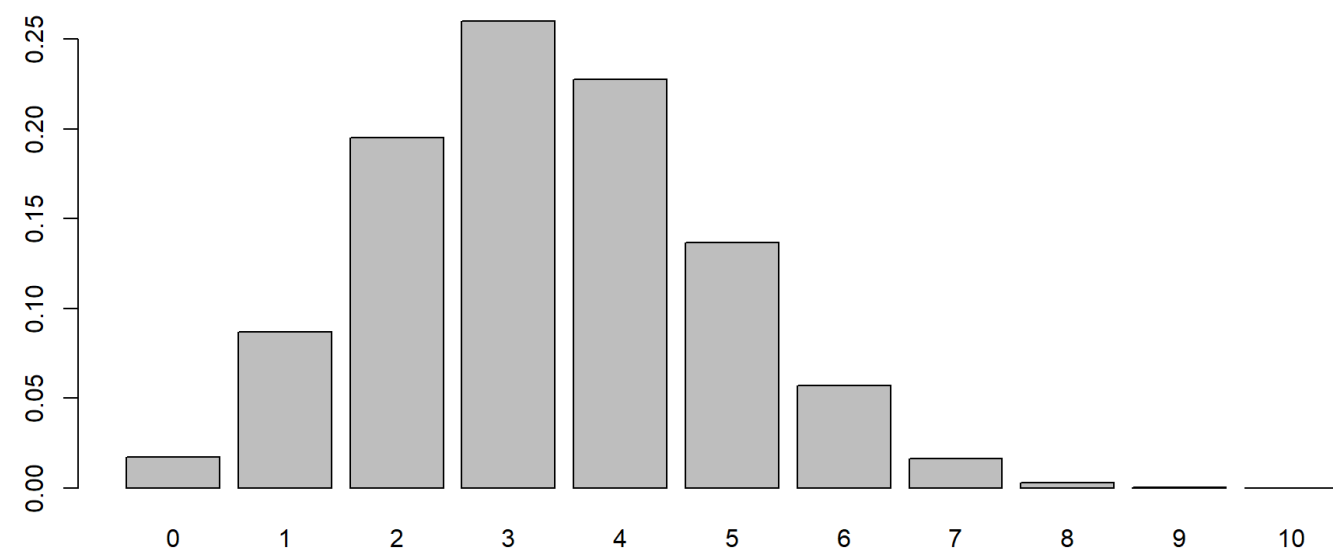
- **d** Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
 - z.B. dbinom, dnorm
- **p** Verteilungsfunktion (kumulierte Wahrscheinlichkeitsfunktion)
 - z.B. pbinom, pnorm
- **q** Quantilfunktion (inverse Verteilungsfunktion)
 - z.B. qbinom, qnorm
- **r** Zufallszahlen aus der Verteilung (für uns gerade uninteressant)
 - z.B. rbinom, rnorm

Auf den nächsten Seiten schauen wir uns exemplarisch die Funktionen für die Binomialverteilung an.

5. Verteilungen - Einführung 3

- `dbinom(x, size, prob)` benötigt drei Argumente
 - `x...` Anzahl Erfolge
 - `size...` Anzahl Durchgänge
 - `prob...` Wahrscheinlichkeit für Erfolg
 - Wahrscheinlichkeit bei 10x würfeln **genau** 4x eine durch 3 teilbare Zahl zu würfeln:
 - `dbinom(4, 10, 1/3)`
 - Säulendiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten (Wahrscheinlichkeitsverteilung):
 - `barplot(dbinom(0:10, 10, 1/3), names.arg=0:10)`

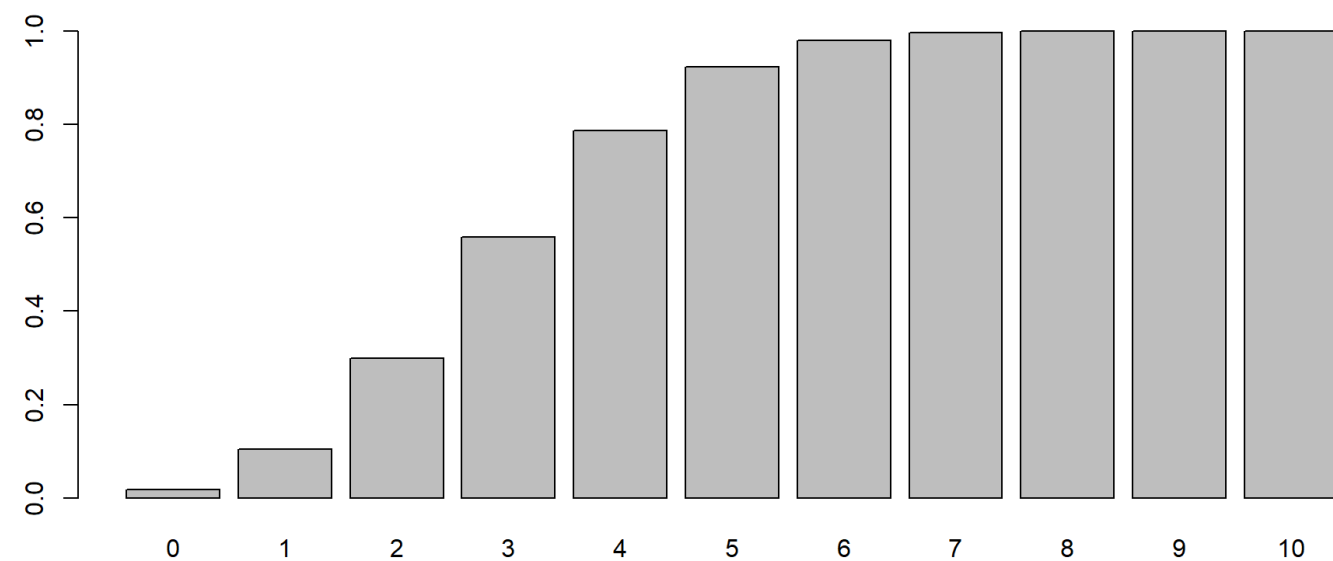
```
[1] 0.2276076
```



5. Verteilungen - Einführung 4

- `pbinom(q, size, prob)` benötigt drei Argumente
 - `q`... maximale Anzahl Erfolge
 - `size`... Anzahl Durchgänge
 - `prob`... Wahrscheinlichkeit für Erfolg
 - Wahrscheinlichkeit bei 10x würfeln **bis zu** 4x eine durch 3 teilbare Zahl zu würfeln:
 - `pbinom(4, 10, 1/3)`
 - Säulendiagramm mit allen kumulierten Wahrscheinlichkeiten (Verteilungsfunktion):
 - `barplot(pbinom(0:10, 10, 1/3), names.arg=0:10)`

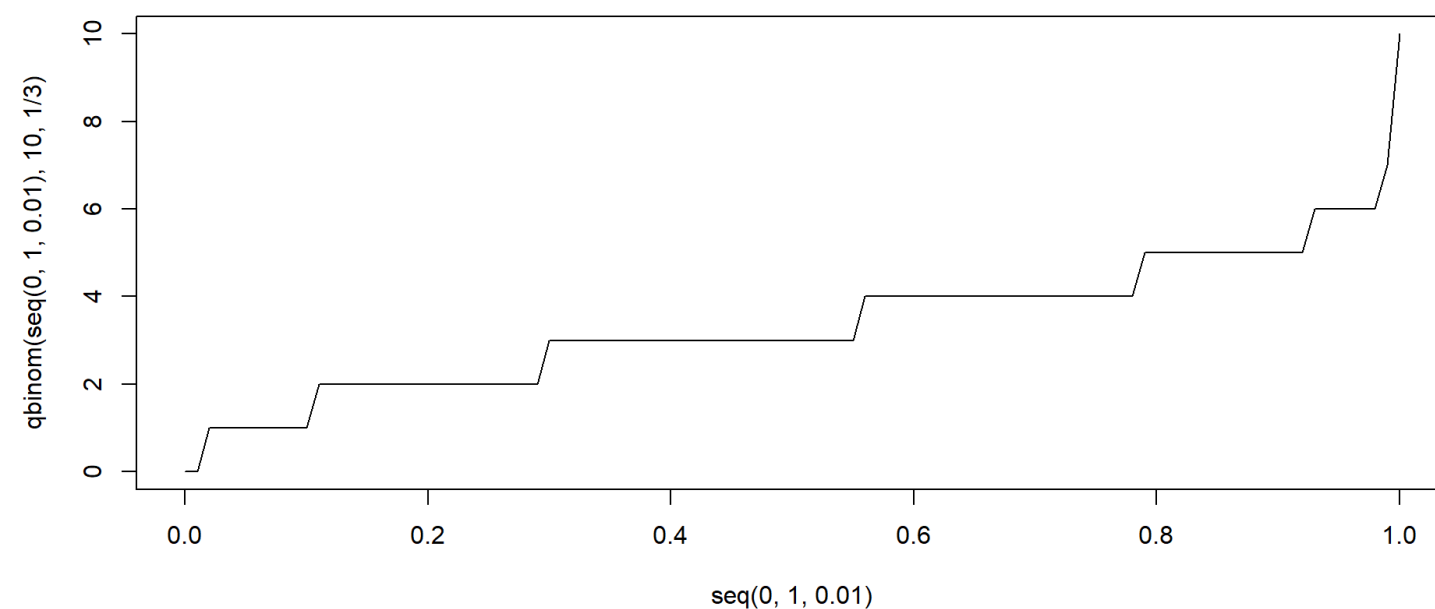
```
[1] 0.7868719
```



5. Verteilungen - Einführung 5

- **qbinom(p, size, prob)** benötigt drei Argumente
 - p... kumulierte Wahrscheinlichkeit für die maximale Anzahl an Erfolgen
 - size... Anzahl Durchgänge
 - prob... Wahrscheinlichkeit für Erfolg
 - Die obere Grenze für die kumulierte Wahrscheinlichkeit bestimmen:
 - `qbinom(0.7868719, 10, 1/3)`
 - Diagramm für die Quantilfunktion (inverse Verteilungsfunktion, etwas geglättet)
 - `plot(seq(0,1,.01),qbinom(seq(0,1,.01),10,1/3),type="l")`

[1] 4



5. Verteilungen - Übung 5

Bestimmen Sie mit Hilfe der drei Befehle die folgenden Werte.

Gehen Sie von einer gezinkten Münze, deren Wahrscheinlichkeit für Kopf bei 0.600 liegt und 12 Münzwürfen aus.

Lassen Sie vorab die Diagramme der Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion ausgeben: je einmal für Kopf als Erfolge und einmal Zahl als Erfolge.

Denken Sie daran, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten von Komplementärereignissen 1.00 ist. Denken Sie auch daran, die führende 0 wegzulassen und auf die dritte Nachkommastelle zu runden.

- Wahrscheinlichkeit 7x Kopf zu werfen
- Wahrscheinlichkeit 5x Zahl zu werfen
- Wahrscheinlichkeit bis zu 8x Kopf zuwerfen
- Wahrscheinlichkeit mindestens 8x Kopf zu werfen.

5. Verteilungen - Übung 6

Zum Abschluss noch ein kleine Rechenübung.

Eine ideale Münze wird 6 geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, 5 oder 6 mal Kopf geworfen zu haben? Berechnen Sie den Wert händisch (+Taschenrechner) mithilfe der Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anschliessend mithilfe der Tabelle zur Binomialverteilung und dem Befehl `pbinom()` in R.